Diploma Programme
Programme du diplôme
Programa del Diploma

Matemáticas
Nivel superior
Prueba 2

Viernes 11 de noviembre de 2016 (mañana)

Número de convocatoria del alumno

2 horas

Instrucciones para los alumnos

- Escriba su número de convocatoria en las casillas de arriba.
- No abra esta prueba hasta que se lo autoricen.
- En esta prueba es necesario usar una calculadora de pantalla gráfica.
- Sección A: conteste todas las preguntas en las casillas provistas.
- Sección B: conteste todas las preguntas en el cuadernillo de respuestas provisto. Escriba su número de convocatoria en la parte delantera del cuadernillo de respuestas, y adjúntelo a este cuestionario de examen y a su portada utilizando los cordeles provistos.
- Salvo que se indique lo contrario en la pregunta, todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o aproximadas con tres cifras significativas.
- Se necesita una copia sin anotaciones del **cuadernillo de fórmulas de matemáticas NS y de ampliación de matemáticas NS** para esta prueba.
- La puntuación máxima para esta prueba de examen es **[120 puntos]**.

14 páginas

8816 – 7226

International Baccalaureate
Baccalauréat International
Bachillerato Internacional

No se otorgará necesariamente la máxima puntuación a una respuesta correcta que no esté acompañada de un procedimiento. Las respuestas deben estar sustentadas en un procedimiento o en explicaciones. En particular, junto a los resultados obtenidos con calculadora de pantalla gráfica, deberá reflejarse por escrito el procedimiento seguido para su obtención; por ejemplo, si se utiliza un gráfico para hallar una solución, se deberá dibujar aproximadamente la misma como parte de la respuesta. Aun cuando una respuesta sea errónea, podrán otorgarse algunos puntos si el método empleado es correcto, siempre que aparezca por escrito. Por lo tanto, se aconseja mostrar todo el procedimiento seguido.

Sección A

Conteste **todas** las preguntas en las casillas provistas. De ser necesario, se puede continuar desarrollando la respuesta en el espacio que queda debajo de las líneas.

1. [Puntuación máxima: 5]

Una variable aleatoria X tiene la distribución de probabilidad que se muestra en la siguiente tabla.

x	0,5	1,5	2,5	3,5	4,5	5,5
$\mathrm{P}(X=x)$	0,12	0,18	0,20	0,28	0,14	0,08

(a) Determine el valor de $\mathrm{E}(X^2)$. [2]

(b) Halle el valor de $\mathrm{Var}(X)$. [3]

. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .

2. [Puntuación máxima: 5]

Halle el ángulo agudo entre los planos cuyas ecuaciones son $x + y + z = 3$ y $2x - z = 2$.

3. [Puntuación máxima: 6]

Una variable aleatoria discreta X sigue una distribución de Poisson $\mathrm{Po}(\mu)$.

(a) Muestre que $\mathrm{P}(X = x + 1) = \dfrac{\mu}{x+1} \times \mathrm{P}(X = x),\ x \in \mathbb{N}$. [3]

(b) Sabiendo que $\mathrm{P}(X = 2) = 0{,}241667$ y que $\mathrm{P}(X = 3) = 0{,}112777$, utilice el apartado (a) para hallar el valor de μ. [3]

4. [Puntuación máxima: 5]

Halle el término constante en el desarrollo de $\left(4x^2 - \dfrac{3}{2x}\right)^{12}$.

5. [Puntuación máxima: 9]

Considere la función f definida mediante $f(x) = 3x \arccos(x)$, donde $-1 \leq x \leq 1$.

(a) Dibuje aproximadamente el gráfico de f indicando claramente todos los puntos de corte con los ejes y las coordenadas de todos los máximos o mínimos locales que haya. [3]

(b) Indique el recorrido de f. [2]

(c) Resuelva la inecuación $|3x \arccos(x)| > 1$. [4]

6. [Puntuación máxima: 6]

Un satélite terrestre se mueve siguiendo una trayectoria definida mediante la curva $72{,}5x^2 + 71{,}5y^2 = 1$, donde $x = x(t)$ e $y = y(t)$ se expresan en miles de kilómetros y t es el tiempo en segundos.

Sabiendo que $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 7{,}75 \times 10^{-5}$ cuando $x = 3{,}2 \times 10^{-3}$, halle los posibles valores de $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$. Dé las respuestas en forma estándar (notación científica).

. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .

7. [Puntuación máxima: 8]

El triángulo ABC es tal que $\mathrm{AB} = 4\,\mathrm{cm}$, $\mathrm{BC} = 3\,\mathrm{cm}$ y $\mathrm{B\hat{A}C} = \frac{\pi}{9}$.

(a) Utilice el teorema del coseno para hallar los dos posibles valores de AC. [5]

(b) Halle la diferencia entre las áreas de los dos posibles triángulos ABC. [3]

8. [Puntuación máxima: 8]

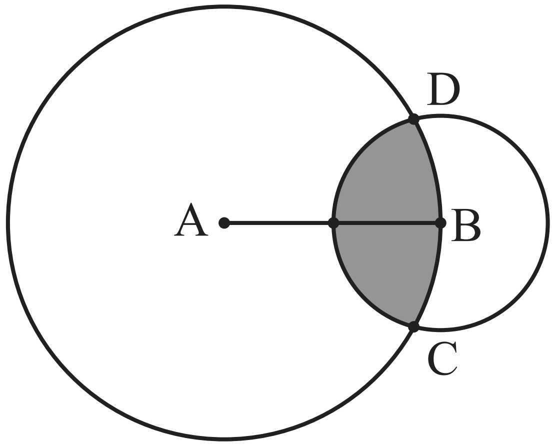
Una variable aleatoria X sigue una distribución normal de media μ y desviación típica σ, tal que $\mathrm{P}(X < 30{,}31) = 0{,}1180$ y $\mathrm{P}(X > 42{,}52) = 0{,}3060$.

(a) Halle μ y σ. [6]

(b) Halle $\mathrm{P}\left(|X - \mu| < 1{,}2\sigma\right)$. [2]

9. [Puntuación máxima: 8]

El diagrama muestra dos circunferencias con centros en los puntos A y B y radios $2r$ y r, respectivamente. El punto B pertenece a la circunferencia que tiene centro en A. Las circunferencias se cortan en los puntos C y D.



Sea α la medida del ángulo CAD y θ la medida del ángulo CBD, ambas en radianes.

(a) Halle una expresión para el área de la zona sombreada en función de α, θ y r. [3]

(b) Muestre que $\alpha = 4\,\mathrm{arcsen}\,\dfrac{1}{4}$. [2]

(c) A partir de lo anterior, halle el valor de r, sabiendo que el área de la zona sombreada es igual a 4. [3]

NO escriba soluciones en esta página.

Sección B

Conteste **todas** las preguntas en el cuadernillo de respuestas provisto. Empiece una página nueva para cada respuesta.

10. [Puntuación máxima: 22]

Sea f la función definida mediante $f(x) = \frac{2 - e^x}{2e^x - 1}$, $x \in D$.

(a) Determine D, el mayor dominio posible de f. [2]

(b) Muestre que el gráfico de f tiene tres asíntotas e indique sus ecuaciones. [5]

(c) Muestre que $f'(x) = -\frac{3e^x}{\left(2e^x - 1\right)^2}$. [3]

(d) Utilice las respuestas dadas en los apartados (b) y (c) para justificar que f tiene una inversa e indique su dominio. [4]

(e) Halle una expresión para $f^{-1}(x)$. [4]

(f) Considere la región R delimitada por el gráfico de $y = f(x)$ y los ejes.
Halle el volumen del sólido de revolución que se obtiene cuando R se rota 2π alrededor del eje y. [4]

NO escriba soluciones en esta página.

11. [Puntuación máxima: 20]

Una tienda de bombones anuncia obsequios gratuitos para aquellos clientes que reúnan tres cupones. Los cupones se introducen al azar en el 10% de las chocolatinas que se venden en esa tienda. Kati compra algunas de estas chocolatinas y las va abriendo de una en una para ver si contienen un cupón. Sea $\mathrm{P}(X = n)$ la probabilidad de que Kati consiga su tercer cupón en la n-ésima chocolatina que abre.

(Se supone que la probabilidad de que una chocolatina dada contenga un cupón sigue siendo del 10 % durante toda la pregunta.)

(a) Muestre que $\mathrm{P}(X = 3) = 0{,}001$ y $\mathrm{P}(X = 4) = 0{,}0027$. [3]

Se sabe que $\mathrm{P}(X = n) = \dfrac{n^2 + an + b}{2000} \times 0{,}9^{n-3}$ para $n \geq 3$, $n \in \mathbb{N}$.

(b) Halle el valor de las constantes a y b. [5]

(c) Deduzca que $\dfrac{\mathrm{P}(X = n)}{\mathrm{P}(X = n-1)} = \dfrac{0{,}9(n-1)}{n-3}$ para $n > 3$. [4]

(d) (i) A partir de lo anterior, muestre que X tiene dos modas, m_1 y m_2.

(ii) Indique los valores de m_1 y m_2. [5]

La madre de Kati va a la tienda y compra x chocolatinas. Se las lleva a casa para que Kati las abra.

(e) Determine el valor mínimo de x tal que la probabilidad de que Kati reciba al menos un obsequio gratuito sea mayor que $0{,}5$. [3]

NO escriba soluciones en esta página.

12. [Puntuación máxima: 18]

El día que nació, el 1 de enero de 1998, los abuelos de Mary invirtieron $\$x$ en una cuenta de ahorro. A partir de ese momento, fueron depositando $\$x$ todos los meses, el primer día del mes. La cuenta ofrecía un tipo de interés fijo del $0{,}4\%$ mensual. El interés se calculaba el último día de cada mes y se añadía a la cuenta.
Sea $\$A_n$ la cantidad que hay en la cuenta de Mary el último día del mes n-ésimo, justo después de que se haya añadido el interés.

(a) Halle una expresión para A_1 y muestre que $A_2 = 1{,}004^2 x + 1{,}004x$. [2]

(b) (i) Escriba una expresión similar para A_3 y otra para A_4.

(ii) A partir de lo anterior, muestre que la cantidad que había en la cuenta de Mary la víspera del día que cumplió 10 años viene dada por $251(1{,}004^{120} - 1)x$. [6]

(c) Escriba, en función de x, una expresión para A_n en la víspera del día que Mary cumplió 18 años, donde se muestre claramente el valor de n. [1]

(d) Los abuelos de Mary querían que en su cuenta hubiera al menos $\$20\,000$ la víspera del día que cumpliera 18 años. Determine el valor mínimo del depósito mensual $\$x$ que se requiere para conseguir este objetivo. Dé la respuesta aproximando al número entero de dólares más próximo. [4]

(e) Inmediatamente después de cumplir 18 años, Mary decide invertir $\$15\,000$ de este dinero en una cuenta del mismo tipo, obteniendo un $0{,}4\%$ de interés mensual. Todos los años, retira $\$1000$ el día de su cumpleaños, para comprarse un obsequio. Determine cuánto tiempo transcurrirá antes de que no quede dinero en la cuenta. [5]

No escriba en esta página.

Las respuestas que se escriban en esta página no serán corregidas.

No escriba en esta página.

Las respuestas que se escriban en esta página no serán corregidas.